巨大数の定義

$\mathbb{N}$ ： 非負整数全体

$2^{\mathbb{N}}$ ： $\mathbb{N}$の部分集合全体

(X ? a : b) ： 命題Xが真ならaそうでなければb

● オラクルマシン、ゲーデル数

$\sigma \in 2^{\mathbb{N}}$, $e \in \mathbb{N}$, $\mathrm{x} \in \mathbb{N}$ が外から与えられているとする

$\mathrm{dig6}(e, \mathrm{n}) = \left[\frac{e}{6^{\mathrm{n}}}\text{の整数部分を}6\text{で割った時の余り}\right]$

(つまり、eを6進数で書いたときの 6^{n} の位の値)

s∈ℕ, i∈{0,1,2,3,4,5} に対して reg[s][i]∈ℕ, ip[s]∈ℕ の定義

※sに対して帰納的に定義する

s = 0 の時、

reg[0][0] = x

reg[0][i] = 0 (i∈{1,2,3,4,5})

ip[0] = 0

s ≠ 0 の時

ir = dig6(e, ip[s−1]·3),

p1 = dig6(e, ip[s−1]·3+1]),

p2 = dig6(e, ip[s−1]·3+2])

reg1 = reg[s−1][p1],

reg2 = reg[s−1][p2]

とし、

i∈{0,1,2,3,4,5} に対し、

ir = 0 の時、

reg[s][i] = reg[s−1][i]

ip[s] = ip

ir = 1 の時

reg[s][i] = reg[s−1][i]

ip[s] = (reg1 = 0 ? reg2 : ip+1)

ir = 2 の時

reg[s][i] = (i = p1 ? p2 : reg[s−1][i])

ip[s] = ip+1

ir = 3 の時

reg[s][i] = (i = p1 ? reg1+reg2 : reg[s−1][i])

ip[s] = ip+1

ir = 4 の時

reg[s][i] = (i = p1 ? (reg1≧reg2 ? reg1−reg2 : 0) : reg[s−1][i])

ip[s] = ip+1

ir = 5 の時

reg[s][i] = (i = p1 ? (reg1∊σ ? 1 : 0) : reg[s−1][i])

ip[s] = ip+1

記号３種を以下で定める。

$$[\![\sigma, e]\!](\mathrm{x})\downarrow = \left[\ {}^{\exists}\mathrm{s} \in \mathbb{N}\ s.t.\ \mathrm{dig6}(e, \mathrm{ip}[\mathrm{s}] \cdot 3) = 0\ \right]$$

$$[\![\sigma, e]\!](\mathrm{x}) = \mathrm{reg}[\ \min\{\ \mathrm{s} \in \mathbb{N} \mid \mathrm{dig6}(e, \mathrm{ip}[\mathrm{s}] \cdot 3) = 0\ \}\ ][0]$$

※$[\![\sigma, e]\!](\mathrm{x})\downarrow$ が真の場合のみ定義される

$$[\![\sigma, e]\!]\downarrow = \{\ \mathrm{x} \in \mathbb{N} \mid [\![\sigma, e]\!](\mathrm{x})\downarrow \}$$

以上の定義は、6個のレジスタ、1個のインストラクションポインタ、６種の命令を実行出来るマシン上での、１引数１戻り値のプログラムをシミュレートしたものである。

---- 命令セット ----

0 halt **, **	停止（引数によらず）
1 jz reg1, reg2	reg1 が 0 なら reg2 番目の命令に飛ぶ
2 mov reg, imm	reg に imm を代入
3 add reg1, reg2	reg1 に reg1 + reg2 を代入
4 sub reg1, reg2	reg1 に（reg1 < reg2 なら 0、そうでなければ reg1 - reg2）を代入
5 oracle reg1, reg2	reg1 に（reg2 ∊ σ なら 1、そうでなければ 0）を代入

● $\mathcal{ORD}_\sigma$の定義

$\sigma \in 2^{\mathbb{N}}$に対し、$\mathbb{N}$の部分集合$\mathcal{ORD}_\sigma$を以下で定める。

$$\mathcal{ORD}_\sigma = \left\{ e \in \mathbb{N} \;\middle|\; \begin{array}{c} {}^\forall k_0, k_1, k_2, \ldots \in \mathbb{N},\ {}^\exists N, a_0, a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{N} \\ s.t. \\ a_0 = e,\ \ a_N = 0, \\ {}^\forall i \in \mathbb{N}\ s.t.\ i < N \Longrightarrow \begin{array}{c} [\![\sigma, a_i]\!](k_i) \downarrow \\ a_{i+1} = [\![\sigma, a_i]\!](k_i) \end{array} \end{array} \right\}$$

$\mathcal{ORD}_\sigma$に対し、

$$x \underset{\sigma}{\leq} y \iff \left[\begin{array}{c} {}^\exists N, k_0, k_1, \ldots k_{N-1}, a_0, a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{N} \\ s.t. \\ a_0 = y,\ \ a_N = x, \\ {}^\forall i \in \mathbb{N}\ s.t.\ i < N \Longrightarrow \begin{array}{c} [\![\sigma, a_i]\!](k_i) \downarrow \\ a_{i+1} = [\![\sigma, a_i]\!](k_i) \end{array} \end{array} \right]$$

という半順序を定める。

この順序は$\mathcal{ORD}_\sigma$に対する整礎関係となっている。

つまり、任意の空でない部分集合が極小元を持つ。

順序数αに対し、$\mathcal{ORD}_\sigma$の部分集合$[\alpha]_\sigma$をαに対する超限帰納的定義で以下のように定める。

$$[\alpha]_\sigma = \left\{ x \in \mathbb{N} \;\middle|\; x\text{ は}\left(\mathcal{ORD}_\sigma - \bigcup_{\beta<\alpha} [\beta]_\sigma\right)\text{ の } \underset{\sigma}{\leq} \text{ に対する極小元} \right\}$$

$x \in \mathcal{ORD}_\sigma$に対し、$x \in [\alpha]_\sigma$となる順序数$\alpha$が唯一定まる。

この順序数をxに対応する順序数と呼び、$\langle x \rangle_\sigma$で表わす。

● 巨大数の定義

以下のようにXを定める。

$$\mathrm{M}_\sigma(\mathrm{n}) = \min\ [\ \max\{\ \langle \mathrm{x} \rangle_\sigma \mid \mathrm{x} \in \mathcal{ORD}_\sigma\ , \mathrm{x} \leq \mathrm{n}\ \}\ ]_\sigma$$

※$\min,\ \mathrm{x} \leq \mathrm{n}$ は通常の$\mathbb{N}$の順序

$$\biguplus_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}} \sigma_\mathrm{n} = \left\{\ 2^\mathrm{n} \cdot 3^\mathrm{k}\ \middle|\ \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{k} \in \sigma_\mathrm{n}\ \right\}$$

$$\mathrm{S}[\sigma, e] = \begin{cases} \phi & \dots\ e = 0 \\ \displaystyle\biguplus_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}} \biguplus_{\mathrm{k}\in\mathbb{N}} [\![\mathrm{S}[\sigma, [\![\sigma, e]\!](\mathrm{n})], \mathrm{k}]\!] \downarrow & \dots\ e \neq 0 \end{cases}$$

※$e \in \mathcal{ORD}_\sigma$

$$\Sigma_\mathrm{n} = \begin{cases} \phi & \dots\ \mathrm{n} = 0 \\ \displaystyle\biguplus_{\mathrm{i}\in\mathbb{N}} \mathrm{S}\left[\Sigma_{\mathrm{n}-1}, \mathrm{M}_{\Sigma_{\mathrm{n}-1}}(\mathrm{i})\right] & \dots\ \mathrm{n} \neq 0 \end{cases}$$

$$f(\mathrm{n}) = \max\{\ [\![\Sigma_\mathrm{n}, e]\!](\mathrm{x}) \mid e \in \mathbb{N}, \mathrm{x} \in \mathbb{N}, e \leq \mathrm{n}, \mathrm{x} \leq \mathrm{n}, [\![\Sigma_\mathrm{n}, e]\!](\mathrm{x}) \downarrow \}$$

$$\mathrm{X} = f^{64}(4)$$